# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

---

## I

1° *a.* En étudiant les variations de la fonction de la variable réelle $x$ définie par : $x \longmapsto y(x) = (1 + x^2)\, e^{-x^2} - 1$, montrer que :

$$e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2} \quad , \quad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

*b.* Démontrer que :

$$e^{-x} \leqslant e^{-x^2} \qquad \text{pour } x \in [0, 1]$$
$$e^{-x^2} \leqslant e^{-2x} \qquad \text{pour } x \geqslant 2$$

2° Soit $\theta$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par :

$$x \longmapsto \theta(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

*a.* Donner un encadrement de $\theta(1)$ en utilisant 1°.

*b.* Donner le développement en série entière de $e^{-x^2}$ et indiquer son rayon de convergence. A l'aide de ce développement, calculer $\theta(1)$ à $10^{-3}$ près.

3° *a.* Montrer que l'intégrale

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

est absolument convergente.

*b.* Montrer que

$$\int_2^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \leqslant \frac{1}{2}\, e^{-4} .$$

Admettant que $0{,}86 \leqslant \theta(2) \leqslant 0{,}90$, en conclure que $I_0 \leqslant 1$.

## II

1° *a.* Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, les intégrales :

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, x^k\, dx$$

sont convergentes.

*b.* Calculer $I_k$ en fonction de $I_0$ ou de $I_1$ en établissant une relation de récurrence. Calculer $I_1$.

*Pour la suite, on admettra que* $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

*c.* Montrer que $\dfrac{I_k}{k!}$ a pour limite 0 lorsque $k$ devient infini (on envisagera 2 cas).

2° *a.* Établir que l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x\, dx$$

est absolument convergente.

*b.* Montrer que le développement de Mac-Laurin de cos $x$ à l'ordre $n - 1$ s'écrit sous la forme :

$$S_{n-1} + R_{n-1}, \quad \text{où} \quad R_{n-1}(x) = \frac{x^n}{n!} \cos\left[\frac{n\pi}{2} + \eta x\right] \quad (0 < \eta < 1).$$

Montrer que :

$$J = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x)\, e^{-x^2}\, dx .$$

*c.* En déduire la valeur de J en fonction de $e$ et de $\sqrt{\pi}$.

## III

1° $\varphi$ étant la fonction définie, pour $x$ réel, par :

$$x \longmapsto \varphi(x) = e^{-x^2} ,$$

on considère, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $U_n$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad , \quad U_n(x) = e^{x^2}\, \varphi^{(n)}(x) \qquad \left(\varphi^{(0)}(x) = \varphi(x)\right).$$

*a.* Calculer $U_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$.

*b.* Exprimer $U_n(x)$ en fonction de $x$, $U_{n-1}(x)$, $U'_{n-1}(x)$. Démontrer que $U_n$ est une fonction polynôme de la variable réelle $x$ dont on précisera le degré, et calculer le coefficient du terme de plus haut degré de $U_n$.

*c.* Soit $\mathfrak{P}_n$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de la variable réelle $x$ à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $n$.

Démontrer que, pour tout $Q \in \mathfrak{P}_n$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)}(x)\, Q(x)\, dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, Q^{(n)}(x)\, dx .$$

Quelle est la valeur de cette intégrale dans le cas où Q est de degré $< n$?

2° Calculer, pour $m \neq n$, puis pour $m = n$, l'intégrale :

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, U_n(x)\, U_m(x)\, dx$$

Dans la suite du problème, on pose : $\beta_n = \sqrt{I_{n,n}}$

3° Soit $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite des fonctions définies par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} \quad , \quad H_n(x) = \frac{1}{\beta_n}\, U_n(x) .$$

*a.* Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\{ H_k / k \in \{0,1,\ldots,n\} \}$ constitue une base pour l'espace vectoriel $\mathfrak{P}_n$. Vérifier que :

$$H_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}}} \; ; \; H_1(x) = \frac{-2x}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \; ;$$

$$H_2(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \; ; \; H_3(x) = \frac{3x - 2x^3}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}} .$$

*b.* $\mathfrak{P}_n$ étant rapporté à la base $\{ H_k / k \in \{0,1,\ldots,n\} \}$, montrer que, pour tout

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k H_k ,$$

on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} Q^2(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \; ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} Q'^2(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, \alpha_i\, \alpha_j ,$$

sans chercher à calculer les coefficients $a_{ij}$ dans le cas général.

*c.* Dans le cas particulier où $n = 3$, expliciter la matrice $A = (a_{ij})$, et calculer ses valeurs propres.

4° Soit $\mathfrak{M}_n$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices carrées à $n^2$ éléments. On désigne par N l'application de $\mathfrak{M}_n$ dans $\mathbf{R}_+$ telle que :

$$A \longmapsto N(A) = \sup_{X \in \mathbf{C}^n} \frac{\| XA \|}{\| X \|} , \qquad X \neq (0, \ldots, 0) ,$$

où $\| X \|$ est la norme de $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, définie par :

$$\| X \|^2 = \sum_{j=1}^{n} | x_j |^2$$

*a.* Montrer que $A \longmapsto N(A)$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n$.

*b.* Quelle est la valeur de cette norme pour une matrice diagonale?

*c.* Appliquer ce résultat pour déterminer, dans le cas $n = 3$, la plus petite constante C telle que l'on ait :

$$\forall\, Q \in \mathfrak{P}_3 \; , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} Q'^2(x)\, dx \leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} Q^2(x)\, dx .$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail